

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ТИПОВА ПРОГРАМА КАНДИДАТСЬКОГО ІСПИТУ ІЗ СПЕЦІАЛЬНОСТІ
01.01.06 – АЛГЕБРА І ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ

КИЇВ, 1997

Програма розроблена доктором фізико-математичних наук, професором В.І.Суцанським Київського державного університету ім. Тараса Шевченка.

Програма погоджена з науково-методичною комісією Міністерства освіти України.

Затверджена ВАК України та Атестаційною колегією Міністерства освіти України "23" жовтня 1997р. № 4-4-9/2.

ПРОГРАМА-МІНІМУМ

кандидатського іспиту зі спеціальності
01.01.06. – алгебра і теорія чисел

1. Теорія груп:

Основні поняття: група, підгрупа, гомоморфізм та ізоморфізм, нормальна підгрупа, факторгрупа. Суміжні класи і теорема Лагранжа. Теорема про гомоморфізм. Циклічні групи, їх опис. Нормальні ряди. Теорема Жордана-Гельдера.

Дія групи на множині. Формула орбіт. Класи спряжених елементів. Центр p -групи. Теореми Силова. Будова груп порядків p, p^2, pq . Прості групи, простота знакозмінних груп.

Абелеві групи. Вільні абелеві групи. Підгрупи вільних абелевих груп. Основна теорема про скінченнопороджені абелеві групи.

Вільні групи. Теорема Нільсена-Шрайера про підгрупи вільних груп. Задання груп твірними і співвідношеннями, приклади.

Розв'язні і нільпотентні групи. Нільпотентність p -груп. Розклад скінченної нільпотентної групи у прямий добуток силовських підгруп.

2. Теорія кілець, алгебр та модулів:

Основні поняття: кільце, підкільце, тіло, поле, алгебра, гомоморфізм та ізоморфізм, ідеал, фактор кільце; модуль, підмодуль, фактормодуль. Теорема про гомоморфізм. Прості кільця, простота кільця матриць над тілом. Прості модулі. Лема Шура.

Кільця головних ідеалів, приклади. Однозначність розкладу елементів у добуток первинних. Будова скінченнопороджених модулів над кільцями головних ідеалів. Застосування: основна теорема про скінченнопороджені абелеві групи; теорема про нормальну форму Фробеніуса.

Нетерові кільця та модулі. Теорема Гільберта про базу. Існування тіла часток нетерової (некомутативної) області.

Артінові кільця. Радикал. Напівпрості кільця. Теорема Веддерберна-Артіна про будову напівпростих артінових кілець. Нільпотентність радикала артінова кільця. Будова модулів над напівпустими артіновими кільцями.

Алгебри Лі, приклади. Універсальна обгортуюча алгебри Лі. Теорема Пуанкаре-Біркгофа-Вітта. Нетеровість універсальної обгортуючої скінченновимірної алгебри Лі.

3. Теорія полів:

Первинні (прості) поля. Характеристика поля. Алгебричні і трансцендентні розширення полів. Скінченні розширення, їх алгебричність. Скінченність скінченнопородженого алгебричного розширення. Існування та єдиність розширення, породженого коренем незвідного многочлена. Поле розкладу многочлена, його існування та єдиність. Алгебричне замикання поля, його існування.

Сепарабельні розширення. Теорема про примітивний елемент. Розширення Галуа. Група Галуа. Відповідність Галуа. Основна теорема теорії Галуа. Рівняння, розв'язні у радикалах. Критерій розв'язності рівняння у радикалах. Нерозв'язність у радикалах "загального" рівняння ступеня $n > 4$.

Скінчення поля. Існування і єдиність поля з p^n елементами. Циклічність мультиплікативної групи скінченного поля.

База трансцендентності і ступінь трансцендентності розширення полів.

4. Теорія зображень:

Основні поняття: зображення алгебр та груп, звідні та незвідні, розкладні та нерозкладні зображення, зв'язок зображень з модулями. Групова алгебра групи. Теорема Машке. Характер зображення.

Теореми ортогональності для матричних елементів і характерів незвідних зображень. Кількість незвідних зображень скінченної групи, зв'язок їх розмірностей з порядком групи. Характери абелевих груп.

Поняття про зображення алгебр Лі. Скінченновимірні зображення алгебри Лі $sl(2)$.

5. Комутативна алгебра і алгебрична геометрія:

Кільця часток комутативних кілець. Ідеали кільця часток. Первинні (прості) ідеали. Локальні кільця, локалізація кільця за первинним ідеалом. Спектр комутативного кільця.

Цілі розширення кілець, їх властивості. Цілозамкнені області. Дедекіндові кільця. Однозначність розкладу ідеалів дедекіндова кільця у добуток первинних. Дробові ідеали дедекіндова кільця. Група ідеалів та група класів ідеалів.

Системи алгебричних рівнянь у афінному просторі. Афінні алгебричні многовиди. Теорема Гільберта про нулі. Топологія Зариського. Регулярні відображення афінних алгебричних многовидів. Незвідні многовиди. Розклад многовида на незвідні компоненти. Розмірність афінного многовида, її властивості.

Поняття проєктивного многовиду. Теорема про нулі для проєктивних многовидів. Регулярні відображення проєктивних многовидів. Замкненість образу проєктивного многовиду при регулярному відображенні.

б. Теорія чисел:

Кільця і поля лишків. Порівняння та діофантові рівняння першого ступеня, умови існування розв'язків. Первісні корені та індекси. Квадратичні лишки. Символ Лежандра. Квадратичний закон взаємності.

Кільця цілих алгебричних чисел. Дедекіндовість кільця цілих чисел скінченного розширення поля раціональних чисел. Норма ідеала у кільці цілих алгебричних чисел, її мультиплікативність.

Геометричне зображення алгебричних чисел. Лема Мінковського. Скінченність числа класів ідеалів. Група одиниць. Логарифмічний простір. Теорема Діріхле про будову групи одиниць.

Аналітичні методи у теорії чисел. Дзета-функції Рімана та Дедекінда, їх властивості. Рівномірний розподіл ідеалів по класах. Поля поділу кола. L -ряди Діріхле. Теорема Діріхле про прості числа в арифметичній прогресії.

Алгебричні і трансцендентні числа. Теорема Ліувілля про наближення алгебричних чисел. Приклади трансцендентних чисел. Трансцендентність чисел e та π .

Рекомендована література:

М.Атья, И.Макдональд. Введение в коммутативную алгебру. – Москва: Мир, 1972.

З.И.Боревич, И.Р. Шафаревич. Теория чисел. – Москва: Наука, 1985.

Б.Л. ван дер Варден. Алгебра. – Москва: Наука, 1976.

И.М. Виноградов. Основы теории чисел. – Москва: Наука, 1981.

Ю.А.Дрозд, В.В.Кириченко. Конечномерные алгебры. – Киев: Вища школа, 1980.

А.А.Карацуба. Основы аналитической теории чисел. – Москва: Наука, 1983.

А.И.Кострикин. Введение в алгебру. – Москва: Наука, 1977.

С.Ленг. Алгебра. – Москва: Мир, 1968.

Ж.-П.Серр. Группы и алгебры Ли. – Москва: Мир, 1969.

М.Холл. Теория групп. – Москва: ИЛ, 1962.

И.Р.Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. Т.1 – Москва: Наука, 1988.