

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

**Схвалено**

Вченою радою Інституту  
математики НАН України,  
протокол № 11  
від «11» жовтня 2016 року

**Затверджую**

Директор Інституту математики  
НАН України

академік НАН України

\_\_\_\_\_ А. М. Самойленко

« \_\_ » \_\_\_\_\_

**РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**

**підготовки здобувачів третього (освітньо-наукового)  
рівня вищої освіти – доктора філософії – спеціальності**

**111 «Математика»**

**з дисципліни ДВА.06.03**

**«Гомологічна алгебра»**

## КИЇВ – 2016

### ВСТУП

Дисципліна ДВА.06.03 «Гомологічна алгебра» входить у цикл професійної наукової підготовки аспірантів за спеціальністю 111 «Математика», що читається в 2 семестрі 2 курсу аспірантури в обсязі 4 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS), в тому числі 30 години лекцій, 10 годин практичних та 80 години самостійної, й закінчується іспитом.

**Мета і завдання навчальної дисципліни ДВА.06.03 «Гомологічна алгебра»:** Володіння технікою комплексів та їх гомологій, резольвент та похідних функторів, спектральних послідовностей, вміння їх обчислювати та застосовувати до проблем алгебри, теорії зображень, топології, геометрії, аналізу, математичної фізики.

**Предмет навчальної дисципліни ДВА.06.03 «Гомологічна алгебра»:** Поняття та приклади комплексів, їх гомологій, гомотопії морфізмів і комплексів, конусу морфізму та їх основні властивості. Поняття проєктивних та ін'єктивних модулів і резольвент, їх існування та побудова. Означення, властивості й обчислення похідних функторів. Функтори Ext і Tor, їх обчислення й застосування. Спектральні послідовності, їх побудова й застосування. Гомологічна розмірність кілець. Комплекс Косуля та його застосування. Гомологічні множення, їх обчислення та застосування. Когомології груп, їх властивості й обчислення.

#### **Вимоги до знань та вмінь.**

*Знати:* поняття комплексу та гомологій, їх основні властивості, поняття проєктивних та ін'єктивних модулів і резольвент, способи їх побудови, означення й властивості похідних функторів, зокрема, функторів Ext і Tor, поняття спектральної послідовності, приклади спектральних послідовностей та їх застосувань, означення, властивості й приклади обчислення гомологічної розмірності кілець, гомологій та когомологій груп, конструкцію, властивості й застосування комплексу Косуля.

*Вміти:* обчислювати гомології комплексів, будувати проєктивні й ін'єктивні резольвенти, спектральні послідовності та застосовувати їх до обчислення похідних функторів, гомологічної розмірності кілець, когомологій конкретних груп, застосовувати техніку алгебричної геометрії до дослідження

конкретних задач алгебри, аналізу, топології.

### **Місце в структурно-логічній схемі спеціальності.**

Дисципліна ДВА.06.03 «Гомологічна алгебра» є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня доктора філософії зі спеціальності 111 «Математика» і є невід'ємною частиною підготовки за напрямком «алгебра і теорія чисел».

## **НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

теми	Назва теми	Кількість годин		
		лекції	практичні	Самост. робота
1	Комплекси й гомології	6	2	34
2	Похідні функтори	6	2	34
3	Когомології груп	6	2	34
4	Спектральні послідовності	6	2	34
5	Гомологічні розмірності	6	2	34
Всього годин за семестр		30	10	170

### **Тема 1. Комплекси й гомології.**

Поняття комплексу та його гомологій. Морфізми комплексів, гомотопії морфізмів і комплексів, гомотопічна категорія. Точна послідовність гомологій. Конус морфізму, його властивості та застосування. Точність функторів, приклади (функтори  $\text{Hom}$  і  $\otimes$ , формула спряженості). Проективні й ін'єктивні модулі, їх існування та властивості.

### **Тема 2. Похідні функтори.**

Проективні та ін'єктивні резольвенти модулів і комплексів, їх існування, єдиність з точністю до гомотопії та властивості. Означення й властивості похідних функторів, способи їх обчислення. Функтори  $\text{Ext}$  і  $\text{Tor}$ , їх властивості. Зв'язок  $\text{Ext}^1$  з розширеннями. Множення у функторі  $\text{Ext}$ .

### **Тема 3. Когомології груп.**

Означення й властивості когомологій груп. Стандартні резольвенти й обчислення когомологій, приклади. Когомології Тейта скінчених груп. Зв'язок  $H^2$  і  $H^3$  з розширеннями груп. Групи з періодичними когомологіями.

### **Тема 4. Спектральні послідовності.**

Означення спектральної послідовності та її границі, умови існування границі. Спектральні послідовності градуїованих комплексів та бікомплексів, їх границі. Застосування: спектральні послідовності композиції функторів та часткових похідних, спектральні послідовності когомологій груп.

### **Тема 5. Гомологічні розмірності.**

Гомологічна та слабка гомологічні розмірності, їх властивості. Застосування спектральних послідовностей до оцінки гомологічної розмірності. Приклад: квазіспадкові алгебри. Гомологічна розмірність кілець многочленів та регулярних локальних кілець. Комплекс Косуля, його властивості. Застосування комплексу Косуля в комутативній алгебрі.

### **Література:**

1. Бурбаки Н. Алгебра. Глава X. Гомологическая алгебра. М.: Наука, 1987.
2. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.
3. Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966.
4. Weibel Ch. A. An Introduction to Homological Algebra. Cambridge University Press, 1994.

Програму підготував  
доктор фіз.-мат. наук, професор,  
член-кор. НАН України

Ю. А. Дрозд